11 عمل بناوٹ (تشکیلات) (CONSTRUCTIONS)

11.1 تعارف

نویں کلاس میں آپ نے پرکار اور فٹے یا پیمانے کی مدد سے کچھ جیومیٹری کی شکلیں بنائی ہیں۔ مثال کے طور پر، زاویہ کی تنصیف، ایک قطع خط کا عمودی ناصف، اور کچھ مثلثوں کی شکلیں وغیرہ اور ان کا جواز بھی پیش کیا ہے۔ اس باب میں سابقہ کئے گئے کام کے علم کی مدد سے کچھ اور تشکیلات کا مطالعہ کریں گے۔ آپ سے یہ بھی توقع کی جاتی ہے کہ آپ ان تمام تشکیلات کے سلسلہ میں ریاضیاتی استدلال بھی پیش کریں۔

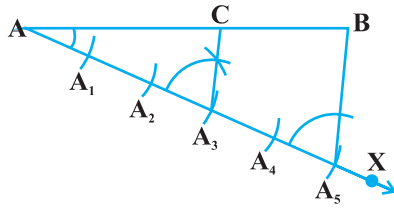
11.2 ایک قطعہ خط کی تقسیم

مان لیجیے آپ کو ایک خط دیا ہوا ہے اور آپ کو اسے دی ہوئی نسبت مان لیجئے۔ 3:2 میں تقسیم کرنا ہے۔ آپ اس کو آسانی سے اس طرح کر سکتے ہیں کہ اس دئے ہو قطع خط کی پیمائش کریں اور اس پر ایک نقطہ ایسا لگائیں کہ وہ اس قطعہ خط کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرتا ہو۔ فرض کیجیے آپ کے آس پاس اس کی پیمائش کا کوئی آلہ یا طریقہ نہیں ہے۔ تو پھر آپ وہ نقطہ کس طرح معلوم کریں گے؟ ہم مندرجہ ذیل میں ایسے دو طریقے بیان کرتے ہیں۔

تشکیل 11.1: دئے ہوئے قطع خط کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرنا۔

ایک قطع خط AB دیا ہوا ہے ہم اس کو m:n کی نسبت میں تقسیم کرنا چاہتے ہیں جہاں دونوں m اور n مثبت صحیح اعداد ہیں۔ اس کو سمجھنے میں اس کی مدد کرنے کے لئے ہم $m=3$ اور $n=2$ لیتے ہیں۔

تشکیل کے اقدام

1. ایک شعاع AX اس طرح بنائیے کہ وہ AB کے ساتھ ایک حادہ زاویہ بنائیے

2. AX پر $5\,(=m+n)$ نقاط A_1, A_2, A_3, A_4 اور A_5 اس طرح مارک کیجیے کہ $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5$

3. BA_5 کو ملا دیجیے۔

4. نقطہ A_3 $(m=3)$ سے A_5B کے متوازی ($\angle AA_5B$ کے برابر زاویہ بناتے ہوئے) A_3 پر کھینچیں جو AB کو نقطہ C پر قطع کرے (شکل 11.1 دیکھیے)

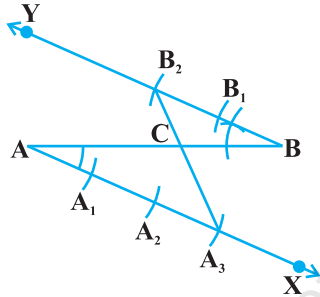
شکل: 11.1

تب $AC : CB = 3 : 2$

آیئے دیکھتے ہیں کہ کیا یہ طریقہ مطلوبہ تقسیم دیتا ہے،

کیونکہ A_3C ، A_5B کے متوازی ہے اس لئے $\frac{AA_3}{A_3A_5}=\frac{AC}{CB}$ (متناسبت کا بنیادی مسئلہ)

تشکیل سے $\frac{AA_3}{A_3A_5}=\frac{3}{2}\cdot$ اس لئے $\frac{AC}{CB}=\frac{3}{2}$

اس سے پتہ چلتا ہے کہ C، AB کو 3:2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے

شکل: 11.2

متبادل طریقہ:

تشکیل کے اقدامات:

1. AB سے حادہ زاویہ بناتی ہوئی ایک شعاع AX کھینچیے:

2. AX کے متوازی ایک شعاع BY اس طرح کھینچیے کہ $\angle ABY$ کے برابر ہو $\angle BAX$ ہو۔

3. AX پر نقاط $3\,(m=3)$، A_1, A_2, A_3 مارک کیجیے اور BY پر $(n=2)$ B_1, B_2 $(m=2)$ اس طرح مارک کیجیے کہ
$AA_1=A_1A_2=A_2A_3=BB_1=B_1B_2$

4. A_3B_2 کو ملایئے، مان لیجیے یہ AB کو نقطہ C پر قطع کرتا ہے (شکل 11.2 دیکھیے)

تب $AC:CB=3:2$۔ یہ طریقہ کیوں کام کرتا ہے؟ آیئے دیکھتے ہیں

یہاں ΔAA_3C مشابہ ہے ΔBB_2C (کیوں؟)

تب $\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{AC}{BC}$

کیونکہ تشکیل سے $\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{3}{2}$، اس لئے $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$۔

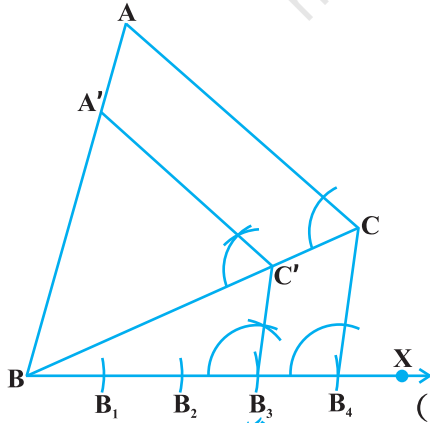
درحقیقت مذکورہ بالا طریقہ دئے ہوئے خط کو کسی بھی نسبت میں تقسیم کرنے کے لئے کارگر ہے۔

اب ہم مذکورہ بالا تشکیل کے طریقہ کو ایک مثلث جس کے اضلاع دوسرے مثلث کے نظیری اضلاع کی دی ہوئی نسبت میں ہوں دوسرے مثلث کو مشابہ بنانے میں استعمال کریں گے۔

تشکیل 11.2: دئے ہوئے Scale factor پر ایک مثلث کے مشابہ مثلث بنانا۔

اس تشکیل میں دو مختلف صورت حال ہیں۔ ایک میں بنایا جانے والا مثلث دئے ہوئے مثلث سے چھوٹا ہو۔ اور دوسری صورت حال میں بڑا ہو۔ یہاں Scale factor کا مطلب ہے بنائے جانے والے مثلث کے اضلاع کی دئے ہوئے مثلث کی نظیری اضلاع نسبت کو باب 6 دیکھئے)۔ آیئے اس تشکیل کو سمجھنے کے لئے مندرجہ ذیل مثالیں لیتے ہیں۔ یہی طریقہ عمومی حالت میں بھی استعمال ہوگا۔

مثال 1: ABC دیا ہوا ہے۔ ہمیں ایک ایسا مثلث ABC بنانا ہے جب کہ اس کے اضلاع مثلث ABC کے نظیری اضلاع کا $\frac{3}{4}$ ہوں (یعنی Scale factor $\frac{3}{4}$ ہے)

حل: ΔABC دیا ہوا ہے۔ ہمیں ایک ایسا مثلث بنانا ہے جس اضلاع مثلث ABC کے نظیری اضلاع کا $\frac{3}{4}$ ہوں۔

تشکیل کے اقدامات

1. ضلع BC سے حادہ زاویہ راس A کی دوسری جانب بناتے ہوئے ایک شعاع BX کھینچیے۔
2. ($\frac{3}{4}$ میں۔ 3 اور 4 میں جو بڑا ہو) نقاط B_1, B_2, B_3 اور B_4 BX پر اس طرح لگائیں کہ $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$
3. B_4C کو ملایئے اور B_3 (نیز نقطہ $\frac{3}{4}$ میں 3 اور 4 میں جو چھوٹا ہے۔)

شکل: 11.3

سے ایک خط B_4C کے متوازی کھینچیں جو BC کو C' پر قطع کرے۔

4. C' سے CA کے متوازی خط کھینچیں جو BA کو A' پر قطع کرے (شکل 11.3 دیکھئے) پس $\Delta A'BC'$ مطلوبہ مثلث ہے۔

آیئے دیکھتے ہیں کہ یہ تشکیل کس طرح سے مطلوبہ مثلث دیتی ہے۔

تشکیل 11.1 سے $\frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$ ۔

اس لئے $\frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ یعنی $\frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

مزید C'A، CA کے متوازی ہے۔ اس لئے $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$ (کیوں؟)

اس لئے $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

مثال 2: ایک مثلث دئے ہوئے مثلث کے مشابہ بنایئے جس کے اضلاع مثلث ABC کے نظیری اضلاع کا (یعنی اسکیل فیکٹر کا $\frac{5}{3}$)

حل: ΔABC دیا ہوا ہے ایک اپنا مثلث بنانا ہے جس کے اضلاع مثلث ABC کے نظیری اضلاع کا، $\frac{5}{3}$ ۔

تشکیل کے اقدام

1. ضلع BC سے حادہ زاویہ راس A کی دوسری جانب بناتے ہوئے ایک شعاع BX کھینچیے۔

2. 5 ($\frac{5}{3}$ میں، 5 اور 3 میں جو بڑا ہو) نقاط B_1, B_2, B_3, B_4 اور B_5 ۔ BX پر اس طرح لگایئے کہ۔

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$$

3. B_3 (تیسرا نقطہ، جو : 5 اور 3 میں جو چھوٹا ہو) کو C سے ملایئے B_5 سے B_3C کے متوازی ایک خط کھینچیں جو قطع خط BC کو بڑھانے پر، C' پر قطع کرے۔

4. C' سے CA کے متوازی ایک خط کھینچیں جو BA کو بڑھانے پر، A' پر قطع کرے شکل 11.4 دیکھیے

پس $\Delta A'BC'$ مطلوبہ مثلث ہے

تشکیل کے جواز کے لئے نوٹ کیجئے کہ $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ (کیوں؟)

اس لئے $\frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$ ۔

لیکن $\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5}$,

اس لئے $\frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$ اور اس لئے $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$ ۔

شکل 11.4:

ریمارک: مثال 1 اور 2 میں آپ AB یا AC سے حادہ زاویہ بناتی ہوئی ایک شعاع لے سکتے ہیں اور اسی طرح آگے بڑھ سکتے ہیں۔

مشق 11.1

مندرجہ ذیل ہر ایک میں تشکیل کا جواز بھی پیش کیجیے۔

1. 7.5 سینٹی میٹر لمبائی کا ایک قطع خط کھینچئے اور اس کو 5:8 کی نسبت میں تقسیم کیجئے۔ دونوں حصوں کی پیمائش بھی کیجیے۔
2. ایک مثلث بنایئے جس کے اضلاع کی لمبائیاں 4 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر ہوں اور پھر اس کے مشابہ ایک مثلث بنایئے جس کے اضلاع پہلے مثلث کی نظیری اضلاع کا $\frac{2}{3}$ ہوں۔
3. ایک مثلث بنایئے جس کے اضلاع کی لمبائیاں بالترتیب 5 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 7 سینٹی میٹر ہوں اور پھر اس کے مشابہ دوسرا مثلث بنائے جسے اضلاع پہلے مثلث کے نظیری اضلاع کا $\frac{7}{5}$ ہوں۔
4. ایک مساوی الساقین مثلث بنایئے جس کا قاعدہ 8 سینٹی میٹر اور ارتفاع 4 سینٹی میٹر ہو اور پھر اس کے مشابہ ایک دوسرا مثلث بنائے جس کے اضلاع پہلے مثلث کے نظیری اضلاع کا $1\frac{1}{2}$ ہوں۔
5. مثلث ABC بنایئے جس میں ضلع 5 سینٹی میٹر =AB، 6 سینٹی میٹر =BC اور $\angle ABC = 60°$ پھر اس کے مشابہ ایک دوسرا مثلث بنایئے جس کے اضلاع ΔABC کے نظیری اضلاع کا $\frac{3}{4}$ ہوں۔
6. مثلث ABC بنایئے جس میں $\angle A = 105°$, $\angle B = 45°$ اور ضلع 7 سینٹی میٹر =BC پھر ایک دوسرا مثلث بنایئے جس کے اضلاع کے نظیری اضلاع ΔABC کا $\frac{4}{3}$ گنا ہوں۔
7. ایک قائم مثلث بنایئے جس میں اضلاع (وتر کے علاوہ) بالترتیب سینٹی میٹر 4 اور 3 سینٹی میٹر لمبے ہیں۔ اور پھر ایک دوسرا

مثلث بنائیے۔ جس کے اضلاع دئے ہوئے مثلث کے نظیری اضلاع کے $\frac{5}{3}$ گنا ہو۔

11.3 دائرہ کے مماسوں کی تشکیل

آپ پچھلے باب میں مطالعہ کر چکے ہیں کہ اگر ایک نقطہ دائرہ کے اندر ہو تو اس سے دائرہ پر کوئی مماس نہیں کھینچا جا سکتا۔ لیکن اگر کوئی نقطہ دائرہ پر واقع ہو تو اس نقطہ پر ایک اور صرف ایک ہی مماس کھینچا جا سکتا ہے جو اس نقطہ سے گذرنے والے نصف قطر پر عمود ہوگا۔ اس لئے اگر آپ کو دائرہ کے کسی نقطہ پر مماس بنانا ہے تو آپ اس نقطہ سے نصف قطر بنائیے اور اس نقطے سے گذرتا ہوا نصف قطر پر عمود کھینچئے۔ تب یہی مطلوبہ مماس ہوگا۔

یہ بھی دیکھ چکے ہیں کہ اگر نقطہ دائرہ کے باہر ہو تو اس نقطہ سے دائرہ پر دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔

اب دیکھیں گے کہ ایسے مماس کس طرح کھینچے جا سکتے ہیں۔

تشکیل 11.3: دائرہ کے باہر دئے گئے ایک نقطہ سے دائرہ پر عمود کھینچیے۔

ہمیں مرکز O کا ایک دائرہ دیا ہوا ہے اور ایک نقطہ P جو اس کے باہر ہے۔ ہم P سے دائرہ پر دو عمود بناتے ہیں۔

تشکیل کے اقدام

1. PO کو ملائیے اور اس کی تنصیف کیجیے۔ مان لیجئے PO,M کا وسطی نقطہ ہے۔
2. M کو مرکز مان کر اور MO نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنائیے: مان لیجئے یہ دئے ہوئے دائرہ کو Q اور R پر قطع کرتا ہے۔
3. PQ اور PR کو ملائیے۔

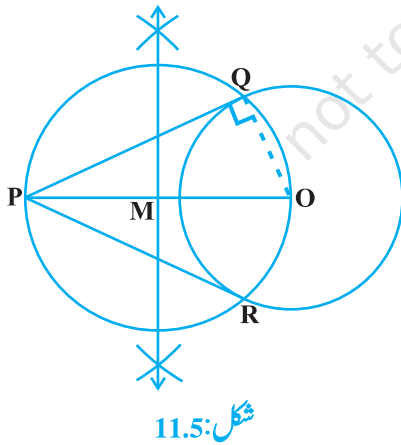
شکل: 11.5

پس PQ اور PR دو مطلوبہ مماس ہیں۔ (شکل 11.5 دیکھیے)

اس لئے اب دیکھتے ہیں کہ یہ تشکیل کس طرح کام کرتی ہے۔

OQ کو ملائیے تب $\angle PQO$، نصف دائرہ میں ایک زاویہ ہے۔

$$\angle PQO = 90^\circ$$

کیا کہہ سکتے ہیں کہ $PQ \perp OQ$؟

کیونکہ OQ ہوئے دائرہ کا نصف قطر ہے، PQ کو دائرہ کا مماس ہونا چاہئے۔اسی طرح سے PR بھی دائرہ مماس کیا ہے۔

نوٹ: اگر دائرہ کا مرکز نہیں دیا ہوا ہو۔تو پھر آپ پہلے اس کا مرکز معلوم کیجیے۔اس کے لئے اب پہلے غیر متوازی وتر لیجیے اور ان کے عمودی ناصفوں کا نقطہ تقاطع معلوم کیجیے۔اور پھر اسی طرح آگے بڑھئے جیسے اوپر دیا گیا ہے۔

مشق 11.2

مندرجہ ذیل میں اور ایک تشکیل کا جواز بھی پیش کیجیے۔

1. 6 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیے۔اس کے مرکز سے 10 سینٹی میٹر دور ایک نقطہ سے دائرہ کے مماسوں کا جوڑا بنائیے اور ان کی لمبائیوں کو ناپیے۔
2. 4 سینٹی میٹر نصف قطر والے ایک دائرہ پر اس کے ہم مرکز ایک دائرہ جس کا نصف قطر 6 سینٹی میٹر ہے۔ مرکز کے نقطہ سے مماس کھینچئے اور اس کی لمبائی کی پیمائش کیجیے۔
3. 3 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک دائرہ بنائیے۔اس کے ایک بڑھے ہوئے قطر پر دو نقطے P اور Q لیجئے جو اس کے مرکز سے 7 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر ہیں۔
4. 5 سینٹی میٹر نصف قطر والے ایک دائرہ پر مماس کے جوڑے بنائیے جن کے درمیان کا زاویہ 60°۔
5. 8 سینٹی میٹر لمبائی کا ایک قطع خط AB کھینچیے۔ A کو مرکز مان کر 4 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک دائرہ کھینچیے اور B کو مرکز مان کر 3 سینٹی میٹر نصف قطر کا دوسرا دائرہ کھینچئے۔ ہر ایک دائرہ پر دوسرے دائرہ کے مرکز سے مماس کھینچیے۔
6. مان لیجئے ABC ایک قائم مثلث ہے جس میں AB=6cm، BC=8cm اور ∠B=90°, BD, B سے AC پر عمود ہے۔ C,B اور D سے گذرتا ہوا ایک دائرہ کھینچا گیا۔ A سے اس دائرہ پر مماس کھینچیے۔
7. ایک چوڑی کی مدد سے ایک دائرہ بنائیے۔دائرہ کے باہر ایک نقطہ لیجئے۔اس نقطہ سے دائرہ پر مماسوں کا جوڑا بنائیے۔

11.4 خلاصہ

اس باب میں آپ نے سیکھا کہ مندرجہ ذیل تشکیلات کیسے کی جاتی ہیں

1. دئے ہوئے قطعہ خط کو دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرنا۔
2. دئے ہوئے Scale factor کے مطابق ایک دئے ہوئے مثلث کے مشابہ بنانا۔Scale factor سے چھوٹا یا 1 سے بڑا بھی

ہوسکتا ہے۔

3. دائرہ کے ایک باہری نقطہ سے دائرہ پر مماس تشکیل کرنا۔

قارئین کے لئے نوٹ

ایک دئے ہوئے Scale factor کے مطابق ایک چار ضلعی (یا کثیر ضلعی کے مشابہ چار ضلعی (یا کثیر ضلعی کی تشکیل بھی اسی طرح سے ہوسکتی ہے جس طرح سے تشکیل 11.2 کی مثالیں 1 اور 2 کی ہوئی۔